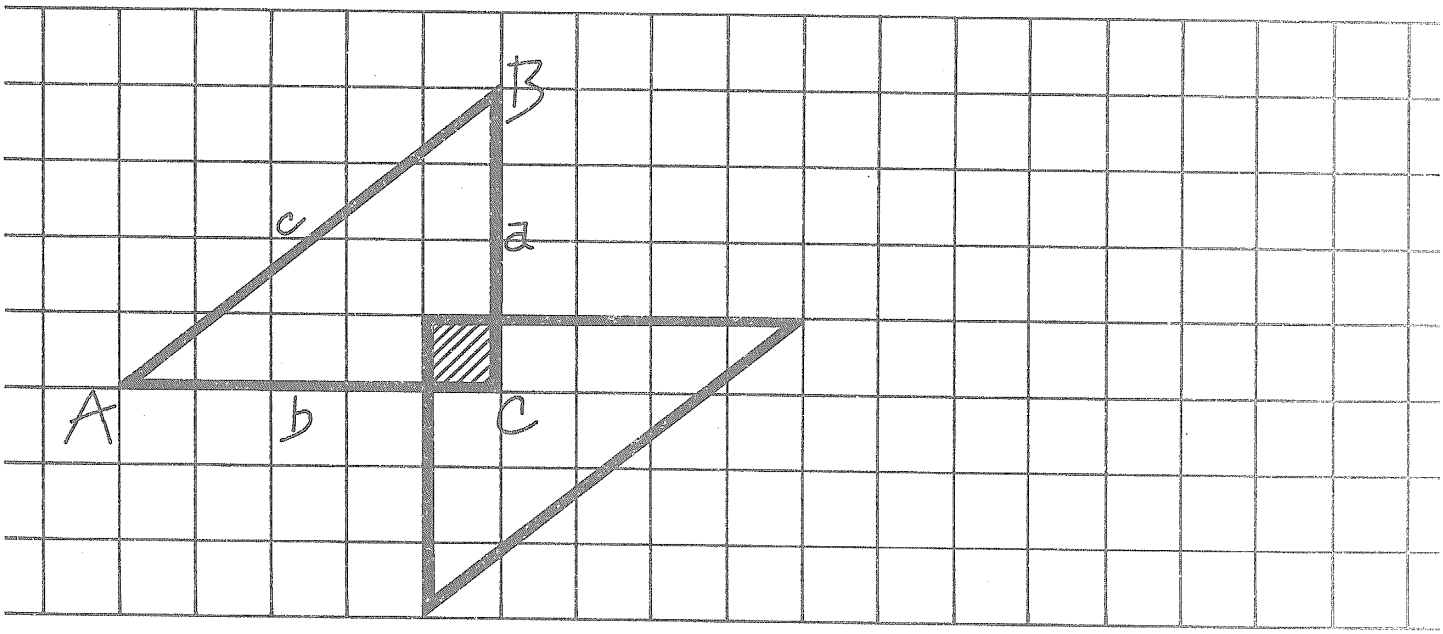
LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

Obras que integran el bloque 5 (*Trigonometría*)

1. ***Las razones trigonométricas de un ángulo agudo***
2. Resoluciones de triángulos rectos
3. El círculo trigonométrico
4. Las funciones trigonométricas
5. Las funciones trigonométricas inversas
6. Identidades trigonométricas
7. Resolución de triángulos cualesquiera
8. Ecuaciones trigonométricas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 5

Trigonometría

Módulo 1

LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.,
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, febrero 1985
ISBN 968-24-0840-7

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

1.1 Seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de un ángulo agudo 9

1.2 Arcoseno, arcocoseno, arcotangente, arcocotangente, arcosecante y arcocosecante 28

1.3 El radián: unidad de medida angular 38

1.4 Dada una razón trigonométrica, determinar las cinco razones faltantes del mismo ángulo 45

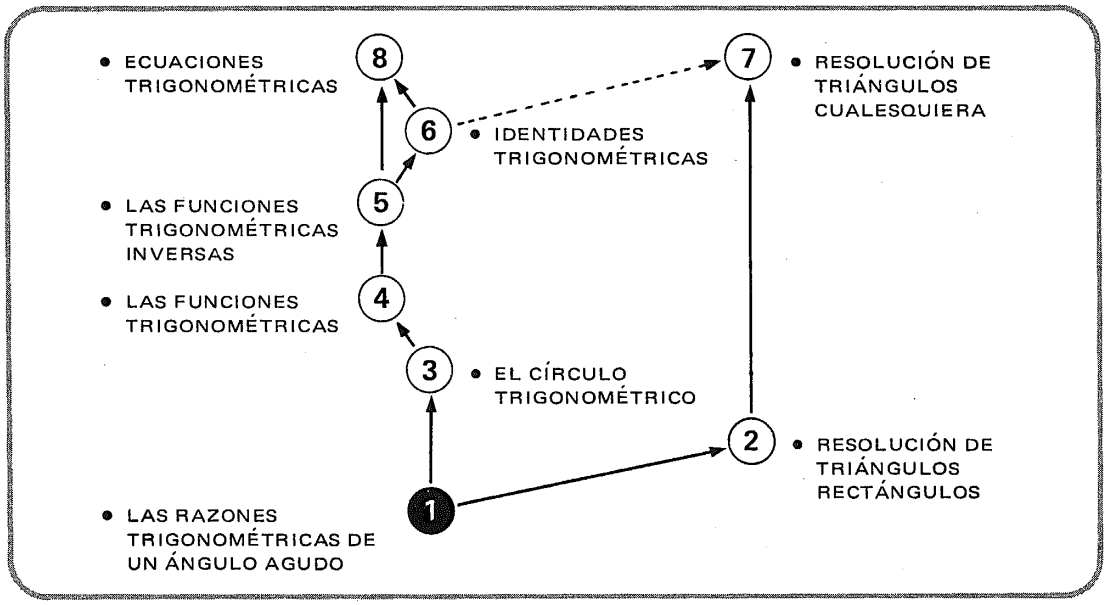
1.5 Razones trigonométricas de ángulos de 45°, 30°, y 60° 61

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 5. Trigonometría

Objetivos: caracterizar las seis funciones trigonométricas y sus inversas, y aplicar los conocimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 5



Módulo 1. Las razones trigonométricas de un ángulo agudo

Objetivos: definir las seis funciones trigonométricas directas y sus correspondientes inversas, y aplicar tales conceptos a la solución de algunos problemas prácticos relacionados con triángulos rectángulos

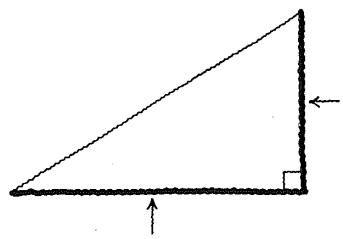
Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética, y la raíz cuadrada	—	—
• Razón y proporción (concepto y manejo)	—	—
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Propiedades geométricas del triángulo y de la circunferencia	4	4, 5
• Teorema de Pitágoras (concepto y manejo)	4	6

1.1

Seno, coseno, tangente,
cotangente, secante y cosecante
de un ángulo agudo.

1

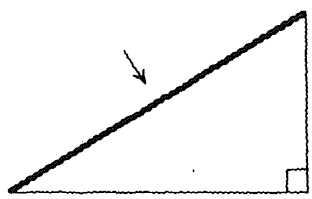
Consideremos **un triángulo rectángulo.**
Recordemos que los lados que forman el ángulo recto se llaman



catetos

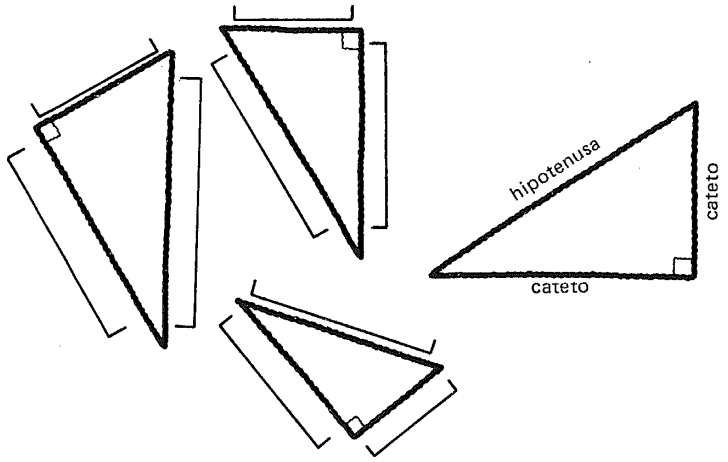
2

El lado opuesto al ángulo recto se llama

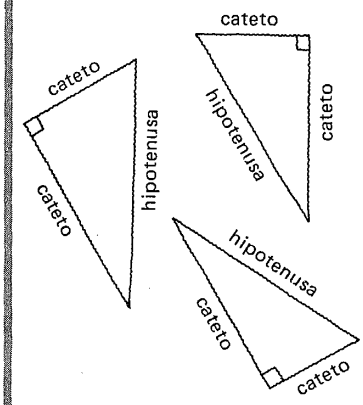


hipotenusa

3

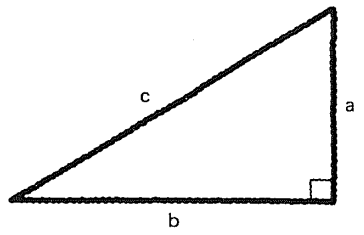


Indicar los nombres correspondientes.



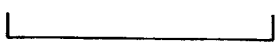
4

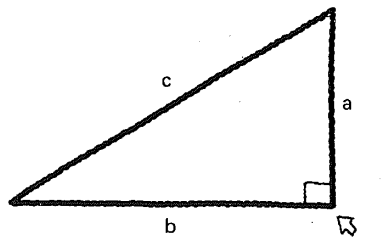
Designemos los lados, y sus medidas, con letras minúsculas.



5

Recordemos que, si el ángulo señalado es recto, los otros dos deberán ser



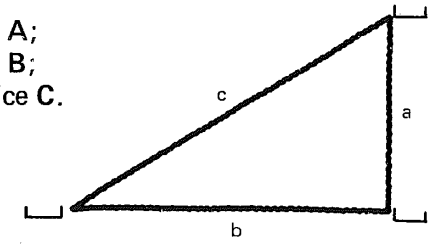


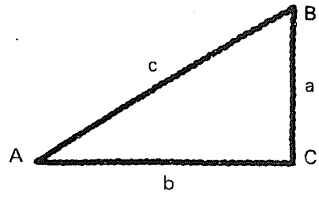
agudos

6

Designemos los vértices con letras mayúsculas, de modo que

al lado **a** se oponga el vértice **A**;
al lado **b** se oponga el vértice **B**;
y al lado **c** se oponga el vértice **C**.

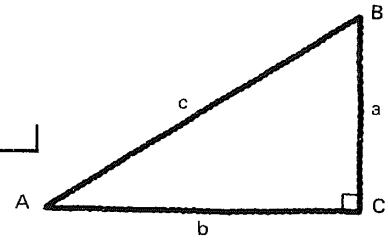




7

El ángulo recto es ⌊_____⌋

Los ángulos agudos son ⌊_____⌋



C

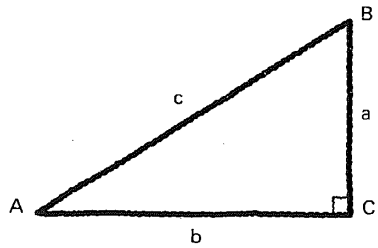
A y B

8

Definamos.

El **cateto opuesto** al $< A$ es ⌊_____⌋

El **cateto opuesto** al $< B$ es ⌊_____⌋



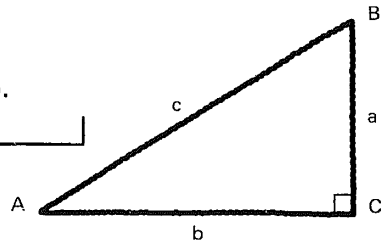
a

b

9

El **cateto adyacente** al $< A$ es b.

El **cateto adyacente** al $< B$ es ⌊___⌋

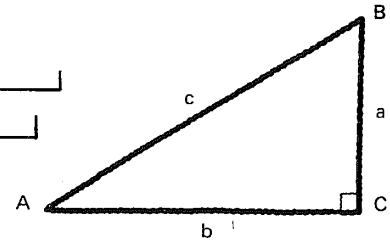


a

10

El **cateto adyacente** al $< B$ es ⌊___⌋

El **cateto opuesto** al $< B$ es ⌊___⌋

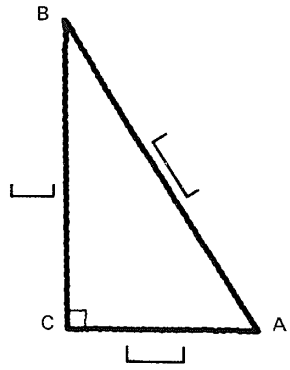


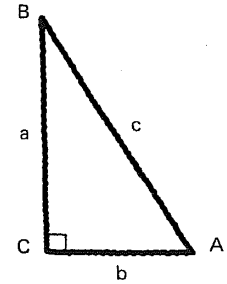
a

b

11

Rotular los lados de acuerdo con la convención adoptada.





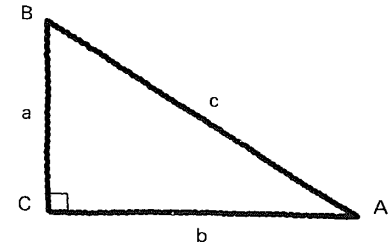
12

La hipotenusa es ⌊_____⌋

El cateto opuesto al $< B$ es ⌊_____⌋

El cateto opuesto al $< A$ es ⌊_____⌋

El cateto adyacente al $< B$ es ⌊_____⌋



c

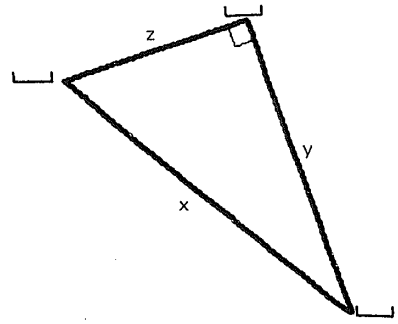
b

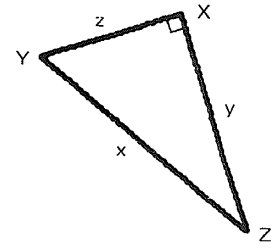
a

a

13

Rotular los vértices de acuerdo con la convención adoptada.





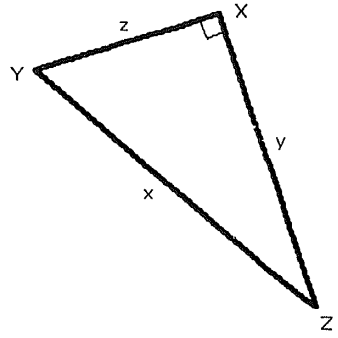
14

La hipotenusa es ⌊_____⌋

El cateto opuesto al $< Z$ es ⌊_____⌋

El cateto opuesto al $< Y$ es ⌊_____⌋

El cateto adyacente al $< Z$ es ⌊_____⌋



x

z

y

y

5.1.1.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

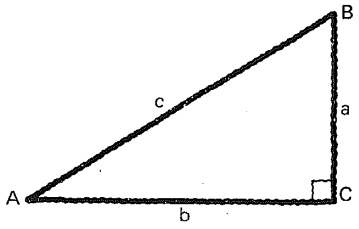
15

Ahora definamos:

seno del ángulo A* $= \frac{a}{c}$

y

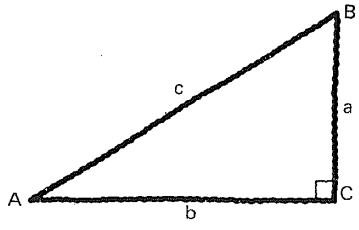
seno del ángulo B $= \frac{b}{c}$



* También puede decirse:
seno del ángulo cuya medida es A.

16

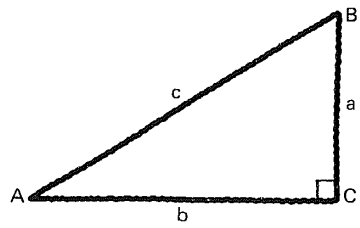
En otros términos,



seno de un ángulo agudo $=$

$$\frac{\text{medida del cateto opuesto al ángulo}}{\text{medida de la hipotenusa}}$$

17



coseno de un ángulo agudo =

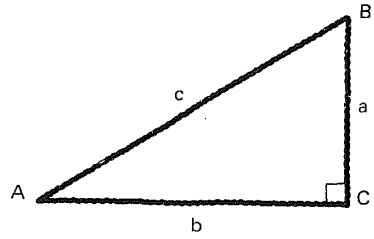
medida del cateto adyacente al ángulo
medida de la hipotenusa

18

De acuerdo con la definición,

coseno del $< A =$ $\frac{\square}{\square}$

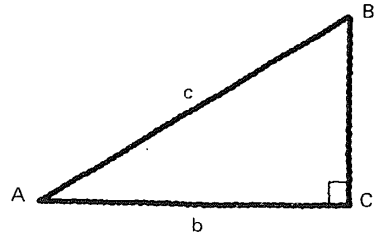
coseno del $< B =$ $\frac{\square}{\square}$



$\frac{b}{c}$

$\frac{a}{c}$

19



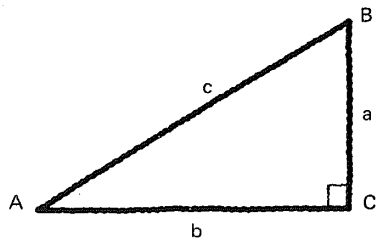
tangente de un ángulo agudo =

medida del cateto opuesto al ángulo
medida del cateto adyacente al ángulo

20

tangente del $< A = \frac{\square}{\square}$

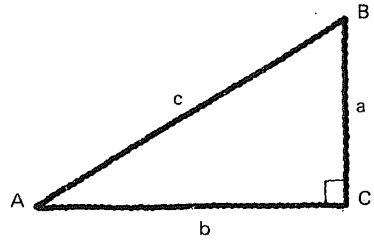
tangente del $< B = \frac{\square}{\square}$



$\frac{a}{b}$

$\frac{b}{a}$

21



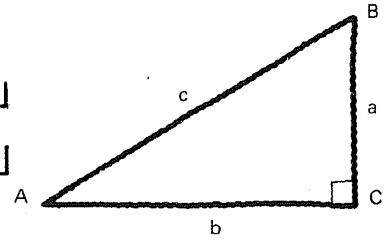
cotangente de un ángulo agudo =

$$\frac{\text{medida del cateto adyacente al ángulo}}{\text{medida del cateto opuesto al ángulo}}$$

22

cotangente del $< A = \square$

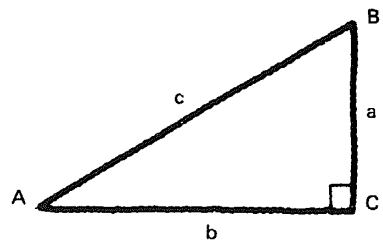
cotangente del $< B = \square$



$\frac{b}{a}$

$\frac{a}{b}$

23



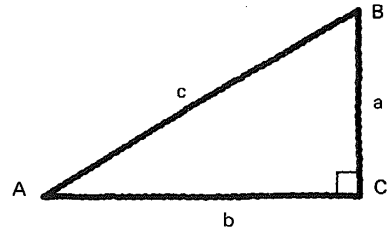
secante de un ángulo agudo =

$$\frac{\text{medida de la hipotenusa}}{\text{medida del cateto adyacente al ángulo}}$$

24

secante del $< A =$ _____

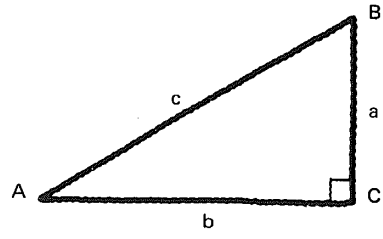
secante del $< B =$ _____



$\frac{c}{b}$

$\frac{c}{a}$

25



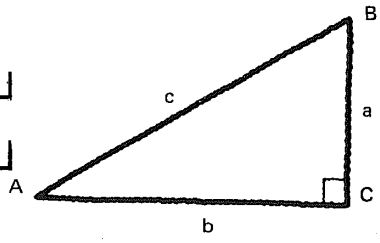
cosecante de un ángulo agudo =

$$\frac{\text{medida de la hipotenusa}}{\text{medida del cateto opuesto al ángulo}}$$

26

cosecante del $< A =$ _____

cosecante del $< B =$ _____



$\frac{c}{a}$

$\frac{c}{b}$

27

Usaremos los siguientes símbolos:

seno del ángulo A:	**sen A**
coseno del ángulo A:	**cos A**
tangente del ángulo A:	**tan A**
cotangente del ángulo A:	**cot A**
secante del ángulo A:	**sec A**
cosecante del ángulo A:	**cosec A**

28

En síntesis:

$$\text{sen } A = \frac{a}{c}$$

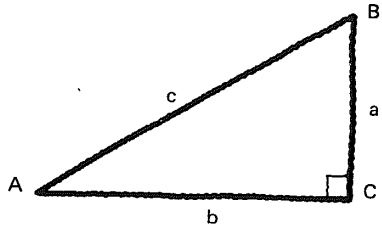
$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$\text{cot } A = \frac{b}{a}$$

$$\text{sec } A = \frac{c}{b}$$

$$\text{cosec } A = \frac{c}{a}$$



29

sen B = ⌊_____⌋

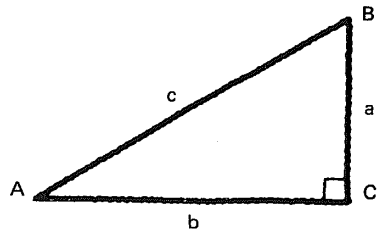
cos B = ⌊_____⌋

tan B = ⌊_____⌋

cot B = ⌊_____⌋

sec B = ⌊_____⌋

cosec B = ⌊_____⌋



$\frac{b}{c}$ $\frac{a}{c}$ $\frac{b}{a}$ $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{a}$ $\frac{c}{b}$

∴

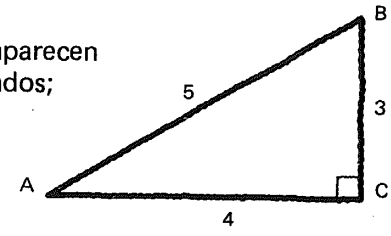
30

En el triángulo representado aparecen indicadas las medidas de los lados; entonces,

sen A = $\frac{\lfloor___\rfloor}{\lfloor___\rfloor} = \lfloor___\rfloor$

↑

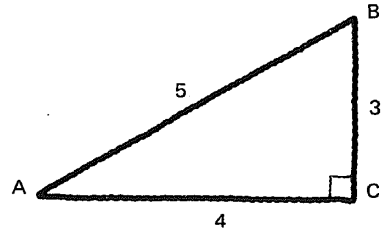
en forma de fracción decimal



$\frac{3}{5} = 0.6$

31

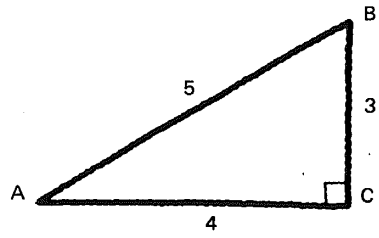
cos B = $\frac{\lfloor___\rfloor}{\lfloor___\rfloor} = \lfloor___\rfloor$



$\frac{3}{5} = 0.6$

32

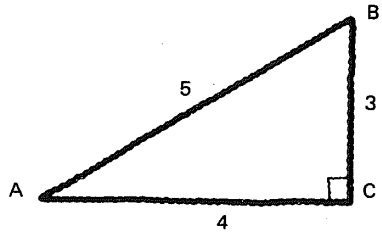
$\tan B = \frac{\square}{\square} = \square$



$\frac{4}{3} = 1.333\ldots$

33

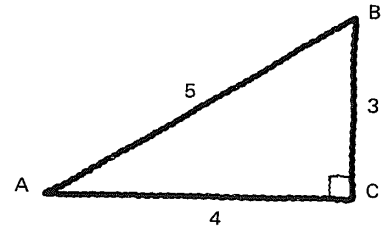
$\cot A = \frac{\square}{\square} = \square$



$\frac{4}{3} = 1.333\ldots$

34

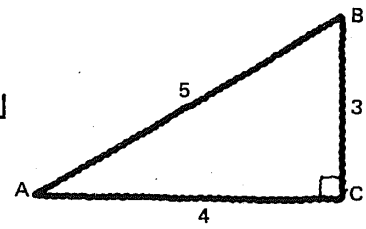
$\sec B = \frac{\square}{\square} = \square$



$\frac{5}{3} = 1.666\ldots$

35

cosec A = $\frac{\square}{\square}$ = $\square$



$\frac{5}{3} = 1.666\ldots$

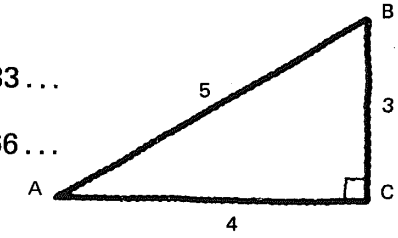
36

Hemos encontrado que:

sen A = cos B $= \frac{3}{5} = 0.6$

tan B = cot A $= \frac{4}{3} = 1.333\ldots$

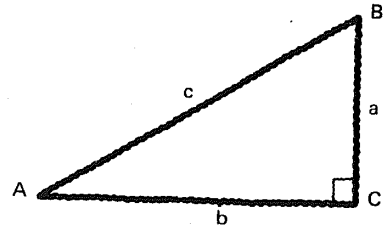
sec B = cosec A $= \frac{5}{3} = 1.666\ldots$



37

Podemos observar que:

sen A = cos B
cos A = $\square$
tan A = $\square$
cot A = $\square$
sec A = $\square$
cosec A = $\square$



sen B
cot B
tan B
cosec B
sec B

5.1.1.2

Práctica adicional,
si se considera necesario.

38

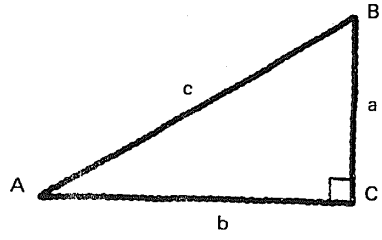
Atención.

Los ángulos A y B son

└──────┘

puesto que:

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C =$ └──┘
$\measuredangle C =$ └──┘
$\measuredangle A + \measuredangle B =$ └──┘



complementarios

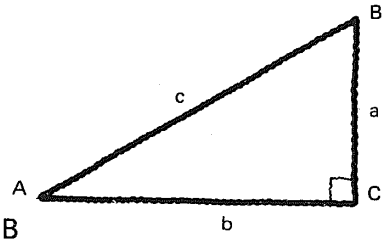
180°
90°
90°

39

Podemos decir, entonces, que:

el **seno** de un ángulo agudo
es igual al **coseno** del ángulo
complementario.

seno del $< A =$ **co**seno del $< B$
└ **complemento**┘



40

Podemos expresar lo anterior así:

sen (90°— A) = cos A
cos (90°— A) = sen A
tan (90°— A) = cot A
cot (90°— A) = tan A
sec (90°— A) = cosec A
cosec (90°— A) = sec A

41

Por ejemplo:

sen 75° = cos ⌊____⌋
cos 60° = sen ⌊____⌋
tan 24°27′ = cot ⌊_____⌋
cot 35° 48′ = tan ⌊_____⌋
sec 82° 24′ 05″ = cosec ⌊_____⌋
cosec 3° 58′ 41″ = sec ⌊_____⌋

15°
30°
65° 33′
54° 12′
7° 35′ 55″
86° 01′ 19″

5.1.1.3

Práctica adicional,
si se considera necesario.

42

Observemos la relación que existe entre el seno y la cosecante, el coseno y la secante, la tangente y la cotangente de un mismo ángulo.

$\text{sen } A = \frac{a}{c}$

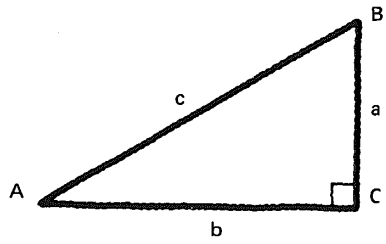
$\cos A = \frac{b}{c}$

$\tan A = \frac{a}{b}$

$\cot A = \frac{b}{a}$

$\sec A = \frac{c}{b}$

$\text{cosec } A = \frac{c}{a}$



43

El **seno** de un ángulo es igual al **inverso multiplicativo** de la **cosecante** del mismo ángulo.
El **coseno** de un ángulo es igual al [ ]

La **tangente** de un ángulo es igual al [ ]

- inverso multiplicativo de la **secante** del mismo ángulo
- inverso multiplicativo de la cotangente del mismo ángulo

44

Por ejemplo:

si $\text{sen } A = \frac{3}{5}$

$\text{cosec } A =$ [ ]

$\frac{5}{3}$

45

Si $\cos A = \frac{1}{2}$

$\sec A =$ ⌊____⌋

$\frac{2}{1} = 2$

46

Si $\tan A = 3$

$\cot A =$ ⌊____⌋

$\frac{1}{3}$

47

Si $\cot A = 0.25$

$\tan A =$ ⌊____⌋

$\frac{1}{0.25} = 4$

48

Si $\sec A = 2.385$

$\cos A \doteq$ ⌊____⌋

0.419

49

Si $\operatorname{cosec} A = \sqrt{5}$

$\operatorname{sen} A =$ ⌊____⌋

$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \doteq 0.447$

50

Si $\tan A = 1$

$\cot A =$ ⌊____⌋

1

5.1.1.4

Práctica adicional,
si se considera necesario.

5.1.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* el seno, el coseno, la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante de un ángulo agudo, como la razón de las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo;
- *determinar* el seno, el coseno, la tangente, la cotangente, la secante o la cosecante de un ángulo agudo a partir de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo dado;
- *enunciar* la relación existente entre el seno y el coseno, la tangente y la cotangente y la secante y la cosecante de dos ángulos complementarios;
- *enunciar* la relación existente entre: seno y cosecante, coseno y secante, y tangente y cotangente, de un ángulo agudo;
- *recordar* la sustracción de números denominados de la forma A° B′ C″, y aplicarla a la determinación del complemento de un ángulo dado;
- *recordar* la determinación del inverso multiplicativo de un número real positivo dado.

1.2

Arcoseno, arcocoseno, arcotangente, arcocotangente, arcosecante y arcocosecante.

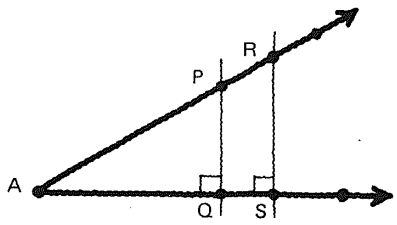
51

Observemos que, en el $\triangle$ APQ:

$$\text{sen } A = \frac{\square}{\square}$$

en el $\triangle$ ARS:

$$\text{sen } A = \frac{\square}{\square}$$



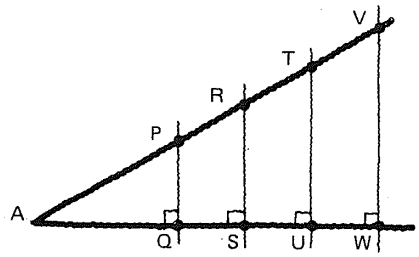
$$\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{AP}|}$$

$$\frac{|\overrightarrow{RS}|}{|\overrightarrow{AR}|}$$

52

En general, se verifica lo siguiente:

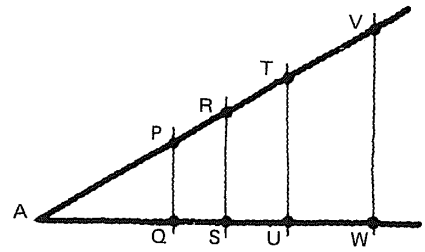
$$\text{sen } A = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$



$$\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{AP}|} = \frac{|\overrightarrow{RS}|}{|\overrightarrow{AR}|} = \frac{|\overrightarrow{TU}|}{|\overrightarrow{AT}|} = \frac{|\overrightarrow{VW}|}{|\overrightarrow{AV}|}$$

53

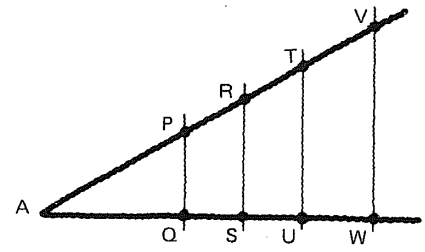
Similarmente:



$$\cos A = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{AP}|} = \frac{|\overrightarrow{AS}|}{|\overrightarrow{AR}|} = \frac{|\overrightarrow{AU}|}{|\overrightarrow{AT}|} = \frac{|\overrightarrow{AW}|}{|\overrightarrow{AV}|}$$

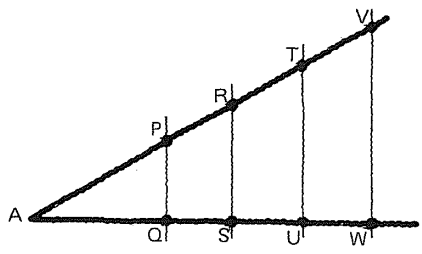
54



$$\tan A = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{AQ}|} = \frac{|\overrightarrow{RS}|}{|\overrightarrow{AS}|} = \frac{|\overrightarrow{TU}|}{|\overrightarrow{AU}|} = \frac{|\overrightarrow{VW}|}{|\overrightarrow{AW}|}$$

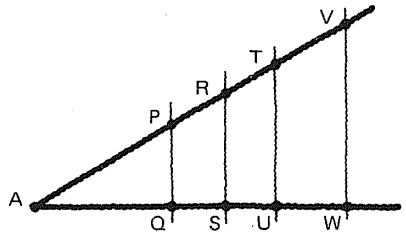
55



$$\cot A = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{|\overrightarrow{AS}|}{|\overrightarrow{RS}|} = \frac{|\overrightarrow{AU}|}{|\overrightarrow{TU}|} = \frac{|\overrightarrow{AW}|}{|\overrightarrow{VW}|}$$

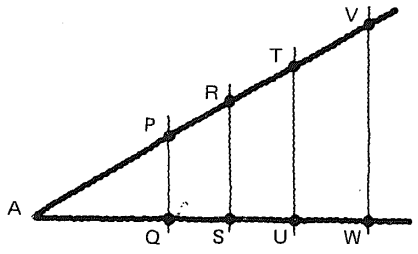
56



$$\sec A = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AQ}|} = \frac{|\overrightarrow{AR}|}{|\overrightarrow{AS}|} = \frac{|\overrightarrow{AT}|}{|\overrightarrow{AU}|} = \frac{|\overrightarrow{AV}|}{|\overrightarrow{AW}|}$$

57



$$\text{cosec } A = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{|\overrightarrow{AR}|}{|\overrightarrow{RS}|} = \frac{|\overrightarrow{AT}|}{|\overrightarrow{TU}|} = \frac{|\overrightarrow{AV}|}{|\overrightarrow{VW}|}$$

58

Hemos observado que cualquiera de las **razones trigonométricas**,

- seno
- coseno
- tangente
- cotangente
- secante
- cosecante

determina la medida de un ángulo agudo; también, que dos ángulos agudos que tienen iguales senos (o cosenos, o tangentes, etc.) tienen la misma medida; dos ángulos agudos que tienen diferentes senos (o cosenos, o tangentes, etc.) tienen diferentes medidas.

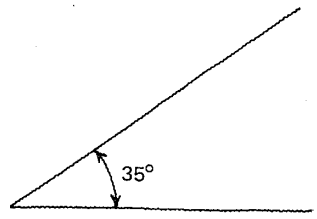
59

Si queremos determinar, en forma aproximada, por ejemplo:

sen 35°

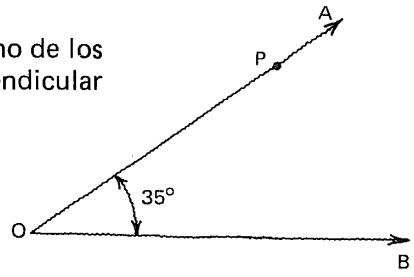
podemos emplear el siguiente procedimiento gráfico.

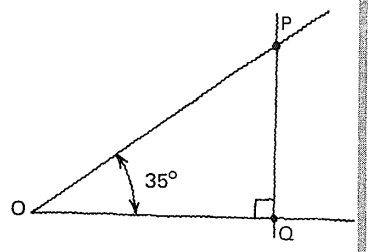
1. Trazar con ayuda de un transportador un ángulo de 35°.



60

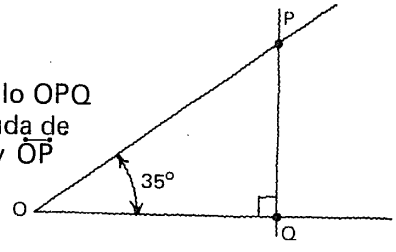
2. Por un punto (P) en uno de los lados, trazar una perpendicular al otro lado.





61

3. En el triángulo rectángulo OPQ formado, medir con ayuda de una regla graduada $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{OP}$



Por ejemplo:

$|\overrightarrow{PQ}| = 2.5$

$|\overrightarrow{OP}| = 4.35$

62

4. Obtener la razón de la medida de $\overleftrightarrow{PQ}$ a la medida de $\overleftrightarrow{OP}$.
Por ejemplo:

$$\frac{|\overleftrightarrow{PQ}|}{|\overleftrightarrow{OP}|} = \frac{2.5}{4.35} \doteq 0.57$$

Por lo tanto:

sen 35° $\doteq$ 0.57

5.1.2.1

Práctica adicional de determinación gráfica del valor numérico aproximado del seno, el coseno, la tangente, la cotangente, la secante o la cosecante, de un ángulo agudo de medida dada. Los valores determinados gráficamente pueden ser comparados con los obtenidos por medio de tablas o calculadoras, si se considera necesario.

63

Si, por ejemplo, sen 35° $\doteq$ 0.57, decimos que

35° es el **arcoseno 0.57**

Simbólicamente

arcsen 0.57 o **sen^{-1} 0.57**

64

Atención.

sen 35° ≐ 0.57

35° = arcsen 0.57

o bien

35° ≐ sen^{-1} 0.57

65

En general,

si sen A = m

entonces **A = arcsen m**

ó **A = sen^{-1} m**

66

En forma similar:

cos A = n	A =
tan A = p	A =
cot A = q	A =
sec A = r	A =
cosec A = s	A =

arccos n ó $\cos^{-1}$ n
arctan p ó $\tan^{-1}$ p
arccot q ó $\cot^{-1}$ q
arcsec r ó $\sec^{-1}$ r
arccosec s ó cosec^{-1} s

67

En resumen.

sen A = m	A = arcsen m (ó sen^{-1} m)
cos A = n	A = arccos n (ó $\cos^{-1}$ n)
tan A = p	A = arctan p (ó $\tan^{-1}$ p)
cot A = q	A = arccot q (ó $\cot^{-1}$ q)
sec A = r	A = arcsec r (ó $\sec^{-1}$ r)
cosec A = s	A = arccosec s (ó cosec^{-1} s)

68

Ahora, supongamos que, a partir de sen A = 0.64 necesitamos determinar

A = arcsen 0.64

Es decir,

A = arcsen 0.64 = ? °

69

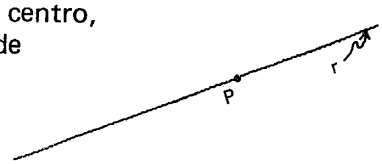
Estudiemos un

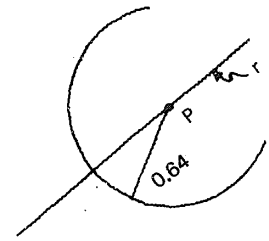
procedimiento gráfico

para determinar, por ejemplo, arcsen 0.64.

70

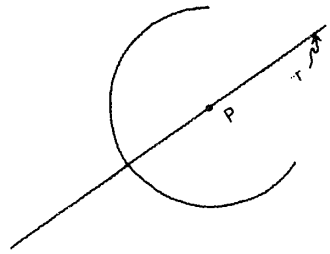
1. Trazar una recta (r).
2. Con un punto P ∈ r como centro, trazar una circunferencia de radio = 0.64.

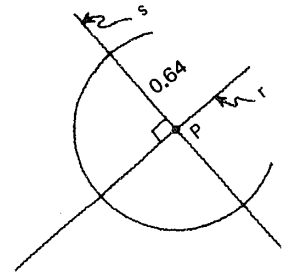




71

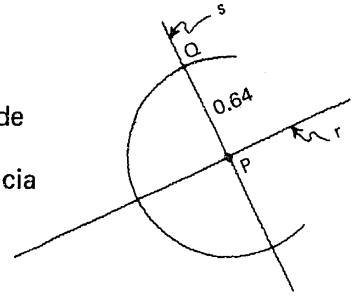
3. Por el punto P trazar la recta s perpendicular a r.

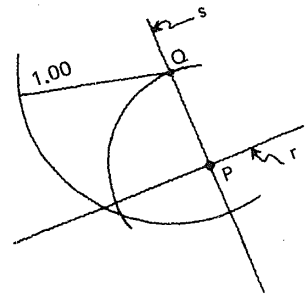




72

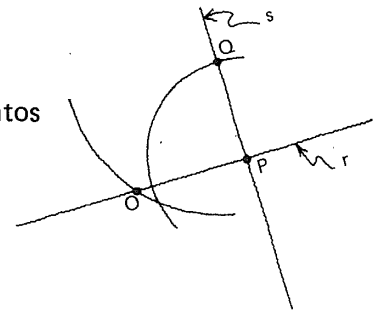
4. Con centro en Q, intersección de la recta s con la circunferencia trazada, trazar otra circunferencia con radio = 1.00.

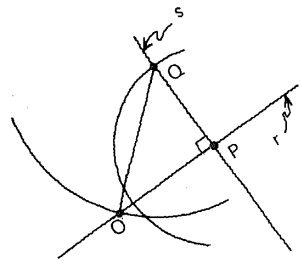




73

5. O es uno cualquiera de los puntos de intersección de esta nueva circunferencia con la recta r. Trazar el segmento $\overline{OQ}$.





74

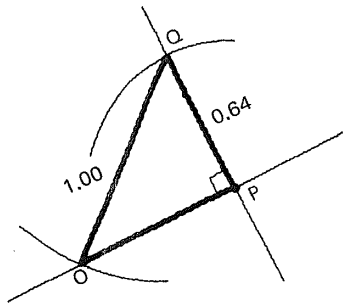
6. Medir el ángulo POQ con ayuda de un transportador.

Observemos que, en el △ rectángulo OPQ

$$\text{sen} < \text{POQ} = \frac{0.64}{1.00} = 0.64;$$

por lo tanto,

arcsen 0.64 = ∡ POQ ≐ ⌊____⌋

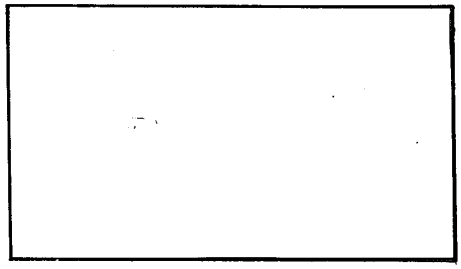


Valor obtenido por medio de una calculadora, para propósitos de verificación:

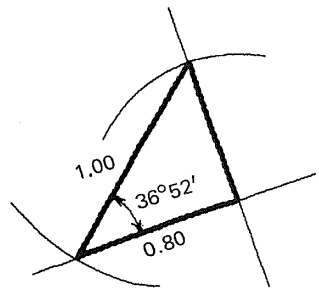
39° 47′

75

Determinar, en forma gráfica.



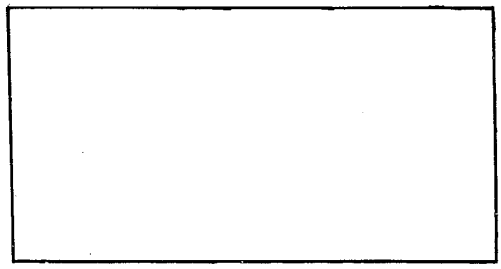
arccos 0.80 ≐ ⌊_____⌋



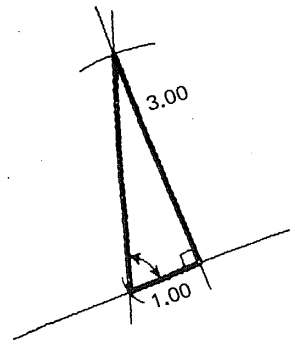
36° 52′

76

Determinar gráficamente.



arctan 3 ≐ ⌊_____⌋



71° 34′

5.1.2.2

Práctica adicional,
si se considera necesario.

5.1.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* gráficamente el seno, el coseno, la tangente, etc., de un ángulo de medida dada;
- *explicar* lo que es el arcoseno, arcocoseno, arcotangente, etc., de un número real positivo dado;
- *determinar* gráficamente el arcoseno, arcocoseno, arcotangente, etc., de un número real dado.

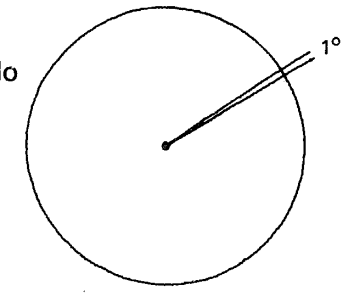
1.3

El radián: unidad de medida angular.

77

Hasta este momento hemos empleado como **unidad de medida angular** el **grado**, que es:

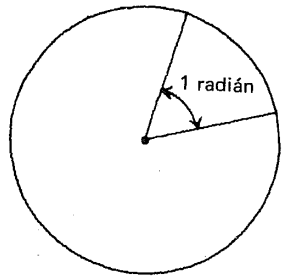
$\frac{1}{360}$ **de la medida de un ángulo de una vuelta.**



78

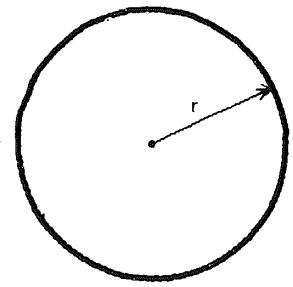
Otra **unidad de medida angular** bastante usada es **el radián**, que es:

$\frac{1}{2\pi}$ **de la medida de un ángulo de una vuelta.**



79

Recordemos que la longitud de una circunferencia de radio r es igual a [ ]



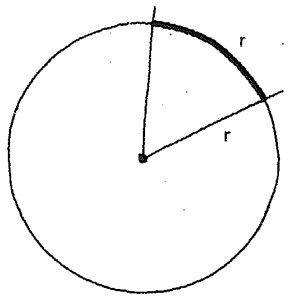
$2\pi r$

80

Atención.

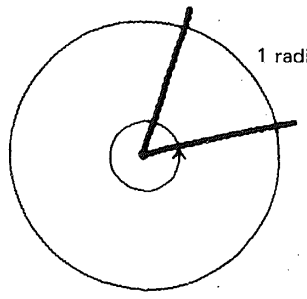
A un ángulo de un radián le corresponde un arco de circunferencia de longitud r, que es $\frac{1}{2\pi}$ de la longitud de la circunferencia.

$$\frac{2\pi r}{2\pi} = r$$



81

Entonces, la medida de un **ángulo de una vuelta** es [ ] radianes.



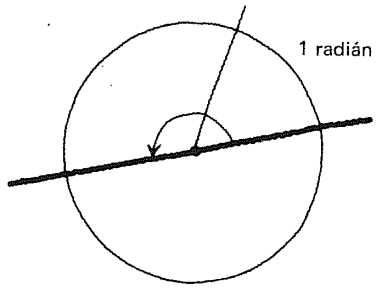
2π (aproximadamente: 6.2832)

82

La medida de un

ángulo llano

es ⌊_____⌋ radianes.



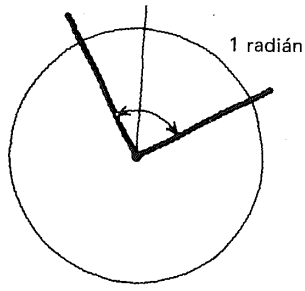
π (aproximadamente: 3.1416)

83

La medida de un

ángulo recto

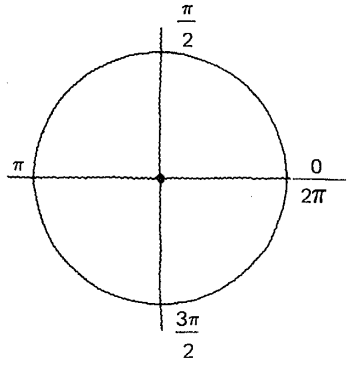
es ⌊_____⌋ radianes.



$\frac{\pi}{2}$ (aproximadamente: 1.5708)

84

Observar con atención.



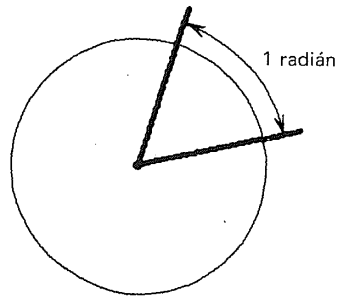
85

Ahora bien, la medida de un ángulo de un radián es aproximadamente

igual a ⌊___⌋ ° ⌊___⌋′,

porque

⌊_____⌋



57° 18′

$$\frac{360^\circ}{2\pi} \doteq \frac{360^\circ}{6.2832} \doteq 57.30^\circ \doteq 57^\circ\ 18'$$

86

En general, la

medida de un ángulo de n radianes

es igual a

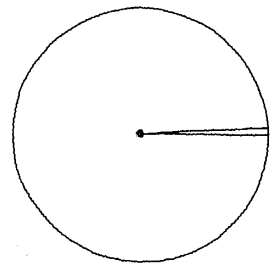
$$\frac{360\ n}{2\pi} = \frac{180\ n}{\pi} \doteq 57.30\ n \text{ grados.}$$

87

La medida de un ángulo de 1° es aproximadamente igual a ⌊_____⌋ radianes,

porque

⌊_____⌋



0.0174

$$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \doteq \frac{3.1416}{180} \doteq 0.0174$$

88

En general, la

medida de un ángulo de n grados

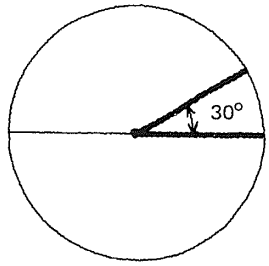
es igual a

$$\frac{2\pi n}{360} = \frac{\pi n}{180} \doteq 0.0174\ n \text{ radianes.}$$

89

Por ejemplo,

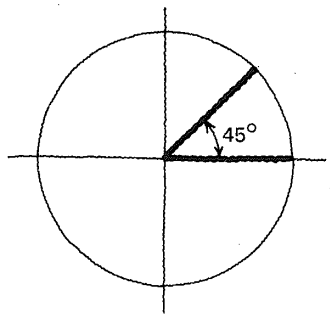
la medida de un ángulo de 30° es igual a
_____ radianes.



$$\frac{\pi \times 30}{180} = \frac{\pi}{6}$$

90

La medida de un ángulo de 45° es igual a
_____ radianes.

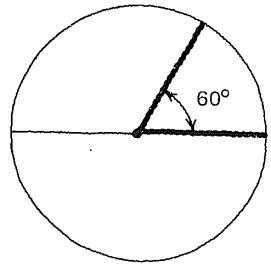


$$\frac{\pi \times 45}{180} = \frac{\pi}{4}$$

91

La medida de un ángulo de 60° es igual a

[ ] radianes.

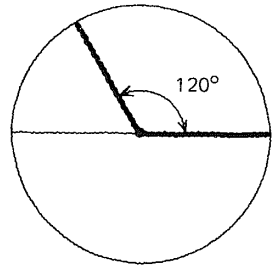


$$\frac{\pi \times 60}{180} = \frac{\pi}{3}$$

92

La medida de un ángulo de 120° es igual a

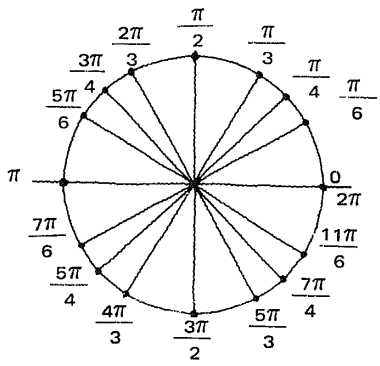
[ ] radianes.



$$\frac{\pi \times 120}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

93

Observar con atención.



5.1.3.1

Práctica adicional de conversión
de medidas angulares de grados
a radianes, y de radianes a grados,
si se considera necesario.

5.1.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *explicar* lo que es el *radián*;
- *determinar* la medida en radianes, de un ángulo cuya medida está dada en grados;
- *determinar* la medida en grados, de un ángulo cuya medida está dada en radianes.

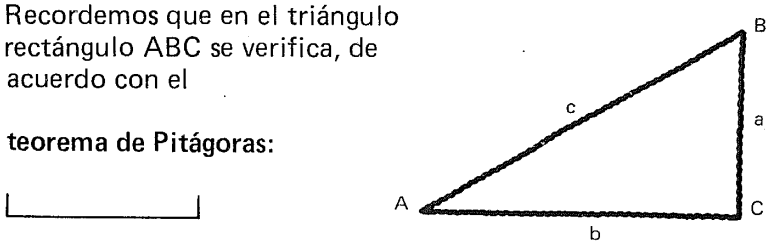
1.4

Dada una razón trigonométrica, determinar las cinco razones faltantes del mismo ángulo.

94

Recordemos que en el triángulo rectángulo ABC se verifica, de acuerdo con el

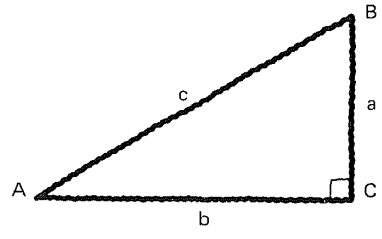
teorema de Pitágoras:



$c^2 = a^2 + b^2$

95

El teorema de Pitágoras nos permite determinar la medida de uno de los lados de un triángulo rectángulo, a partir de las medidas de los otros dos.

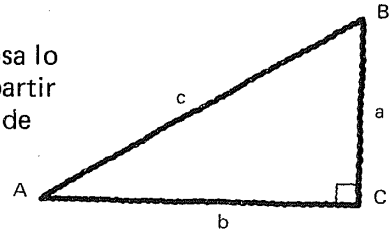


96

Si es la medida de la hipotenusa lo que queremos determinar, a partir de las medidas de los catetos, de

$c^2 = a^2 + b^2$:

$c =$ ⌊_____⌋



$\sqrt{a^2 + b^2}$

97

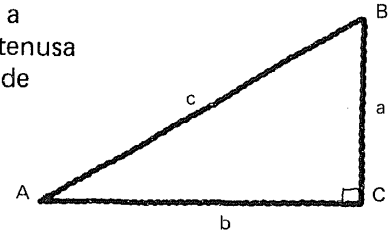
Si lo que deseamos determinar es la medida de uno de los catetos, a partir de la medida de la hipotenusa y la del otro cateto, entonces de

$c^2 = a^2 + b^2$:

$a =$ ⌊_____⌋

ó

$b =$ ⌊_____⌋



$\sqrt{c^2 - b^2}$

$\sqrt{c^2 - a^2}$

98

Si por ejemplo:

$a = 20.10$ metros

y

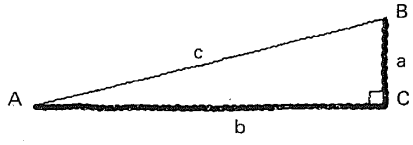
$b = 72.45$ metros

entonces,

$c =$ ⌊_____⌋ expresión general.

⌊_____⌋ para nuestro ejemplo.

$c \doteq$ ⌊_____⌋ metros.



- $\sqrt{a^2 + b^2}$
- $\sqrt{20.10^2 + 72.45^2}$

  $\sqrt{404.01 + 5249.00}$

  $\sqrt{5653.01}$
- 75.19

99

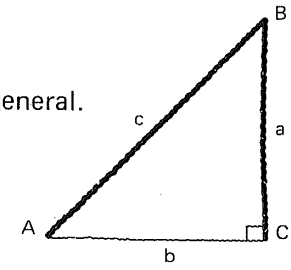
Si a = 50 centímetros

y

c = 65 centímetros

entonces

b = ⌊_____⌋ expresión general.



b ≐ ⌊_____⌋ centímetros.

- $\sqrt{c^2 - a^2}$
- $\sqrt{65^2 - 50^2}$

  $\sqrt{4225 - 2500}$

  $\sqrt{1725}$
- 41.53

5.1.4.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

100

Ahora bien, sabemos que

$$\tan A = \frac{3}{4}$$

y queremos conocer los valores de las otras 5 **razones trigonométricas** de A, es decir:

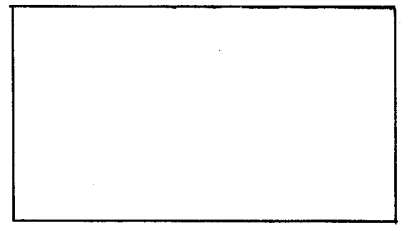
sen A,
cos A,
cot A,
sec A,
cosec A,

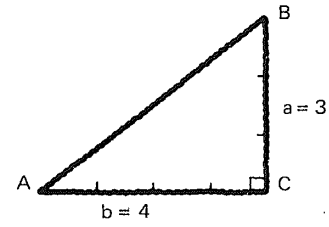
101

1. Dibujemos un triángulo rectángulo, tal que:

$$\frac{\text{medida del cateto opuesto al ángulo A}}{\text{medida del cateto adyacente al ángulo A}} = \frac{3}{4}$$

Por ejemplo

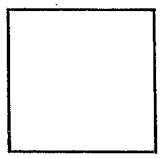


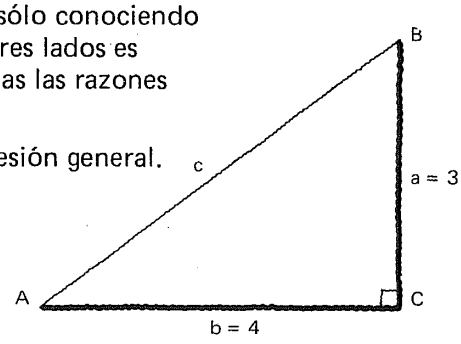


102

2. Determinar la medida de la hipotenusa c, pues sólo conociendo las medidas de los tres lados es posible calcular todas las razones trigonométricas.

c = [ ] expresión general.





c = [ ] unidades de longitud.

- $\sqrt{a^2 + b^2}$
- $\sqrt{3^2 + 4^2}$

$\sqrt{9 + 16}$

$\sqrt{25}$

- 5

103

3. Escribamos los valores de las razones trigonométricas faltantes.

sen A = [ ]

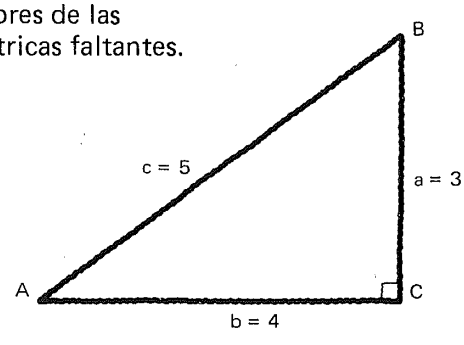
cos A = [ ]

tan A = $\frac{3}{4}$

cot A = [ ]

sec A = [ ]

cosec A = [ ]



3/5

4/5

4/3

5/4

5/3

104

También podemos conocer las razones trigonométricas del ángulo complementario B.

sen B = ⌊___⌋

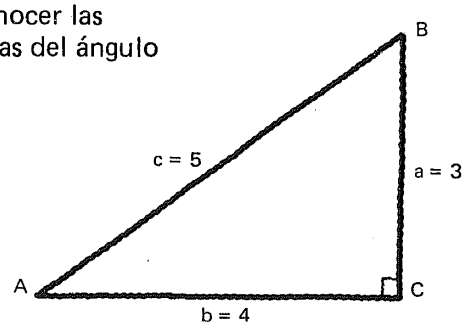
cos B = ⌊___⌋

tan B = ⌊___⌋

cot B = ⌊___⌋

sec B = ⌊___⌋

cosec B = ⌊___⌋



4/5

3/5

4/3

3/4

5/3

5/4

105

No olvidemos la relación sugerida por este esquema:

$$\text{sen A} = \frac{3}{5} \qquad \text{sen B} = \frac{4}{5}$$

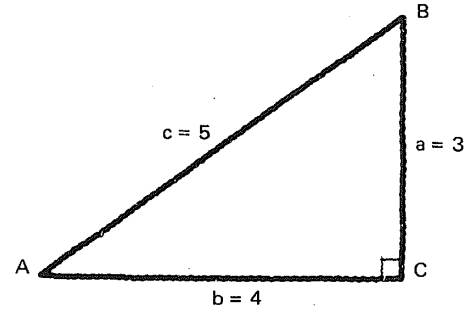
$$\text{cos A} = \frac{4}{5} \qquad \text{cos B} = \frac{3}{5}$$

$$\text{tan A} = \frac{3}{4} \qquad \text{tan B} = \frac{4}{3}$$

$$\text{cot A} = \frac{4}{3} \qquad \text{cot B} = \frac{3}{4}$$

$$\text{sec A} = \frac{5}{4} \qquad \text{sec B} = \frac{5}{3}$$

$$\text{cosec A} = \frac{5}{3} \qquad \text{cosec B} = \frac{5}{4}$$



106

Tampoco debemos olvidar la relación de "reciprocidad" entre las razones indicadas.

$$\text{sen A} = \frac{3}{5}$$

$$\text{cos A} = \frac{4}{5}$$

$$\text{tan A} = \frac{3}{4}$$

$$\text{cot A} = \frac{4}{3}$$

$$\text{sec A} = \frac{5}{4}$$

$$\text{cosec A} = \frac{5}{3}$$

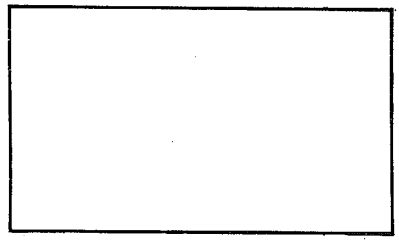
107

Ahora sabemos que

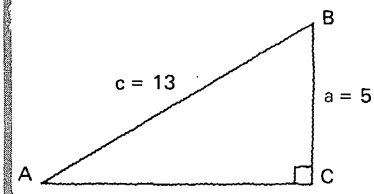
$$\text{sen } A = \frac{5}{13}$$

y se requiere determinar las demás razones trigonométricas.

1. Triángulo rectángulo de referencia:



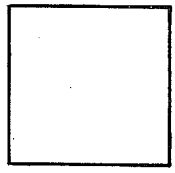
Por ejemplo:

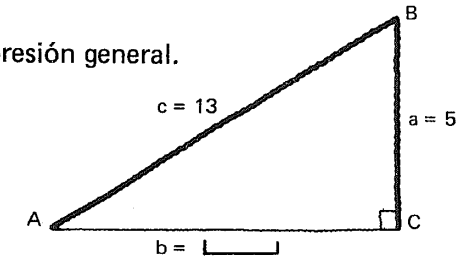


108

2. Cálculo del valor del lado faltante.

b = ____ expresión general.





b = ____ unidades de longitud.

- $\sqrt{c^2 - a^2}$
- $\sqrt{13^2 - 5^2}$

  $\sqrt{169 - 25}$

  $\sqrt{144}$
- 12

109

3. Anotación de las razones trigonométricas faltantes.

sen A = 5/13

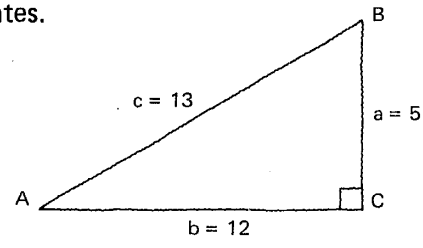
cos A = ____

tan A = ____

cot A = ____

sec A = ____

cosec A = ____



12/13

5/12

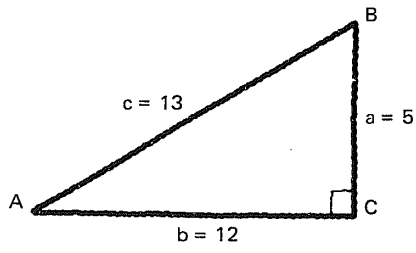
12/5

13/12

13/5

110

sen B = ⌊___⌋
cos B = ⌊___⌋
tan B = ⌊___⌋
cot B = ⌊___⌋
sec B = ⌊___⌋
cosec B = ⌊___⌋



12/13
5/13
12/5
5/12
13/5
13/12

111

Ahora, al saber que cos A = 0.375, se requiere conocer las razones trigonométricas que faltan.

112

Sabemos que la fracción decimal **0.375** es equivalente a la

fracción común irreducible $\frac{\square}{\square}$

$$\frac{375}{1000}$$

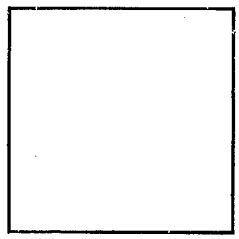
$$\downarrow$$

$$\frac{3}{8}$$

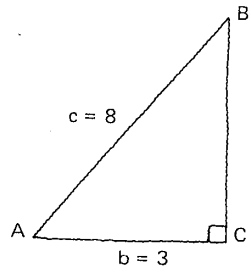
113

$$\cos A = 0.375 = \frac{3}{8}$$

1. Triángulo rectángulo de referencia:



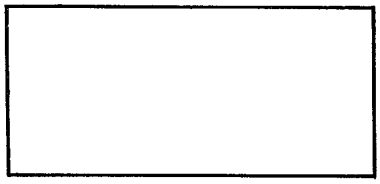
Por ejemplo:

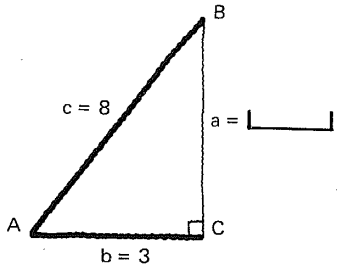


114

2. Cálculo del valor del lado faltante.

a = ⌊ ⌋ expresión general.





a = ⌊ ⌋ unidades de longitud.

- $\sqrt{c^2 - b^2}$
- $\sqrt{8^2 - 3^2}$

  $\sqrt{64 - 9}$

  $\sqrt{55}$
- 7.42

115

3. Anotación de las razones trigonométricas faltantes.

sen A = ⌊ ⌋

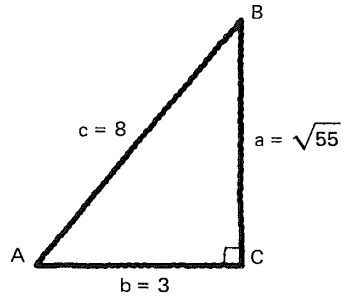
cos A = $\frac{3}{8}$

tan A = ⌊ ⌋

cot A = ⌊ ⌋

sec A = ⌊ ⌋

cosec A = ⌊ ⌋



- $\frac{\sqrt{55}}{8}$
- $\frac{\sqrt{55}}{3}$
- $\frac{3}{\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$ expresiones equivalentes con el denominador racionalizado.
- $\frac{8}{3}$
- $\frac{8}{\sqrt{55}} = \frac{8\sqrt{55}}{55}$

116

Anotar las fracciones decimales equivalentes o aproximadamente equivalentes, con 4 cifras decimales, de las siguientes razones trigonométricas:

sen A = $\frac{\sqrt{55}}{8}$ = ⌊_____⌋

cos A = $\frac{3}{8}$ = ⌊_____⌋

tan A = $\frac{\sqrt{55}}{3}$ = ⌊_____⌋

cot A = $\frac{3\sqrt{55}}{55}$ = ⌊_____⌋

sec A = $\frac{8}{3}$ = ⌊_____⌋

cosec A = $\frac{8\sqrt{55}}{55}$ = ⌊_____⌋

0.9270

0.3750

2.4721

0.4045

2.6666...

1.0787

117

$$\text{sen } A = \sqrt{55}/8 \doteq 0.9270$$
$$\cos A = 3/8 = 0.3750$$
$$\tan A = \sqrt{55}/3 \doteq 2.4721$$
$$\cot A = 3\sqrt{55}/55 \doteq 0.4045$$
$$\sec A = 8/3 = 2.6666\ldots$$
$$\text{cosec } A = \frac{8\sqrt{55}}{55} \doteq 1.0787$$

comprobemos los resultados obtenidos, basándonos en la reciprocidad de las razones: seno y cosecante, coseno y secante, y tangente y cotangente.

118

Señalar las razones trigonométricas (r) que sean:

números racionales ($\mathbb{Q}$)
números irracionales ($\mathbb{I}$)
números reales ($\mathbb{R}$)

	$r \in \mathbb{Q}$	$r \in \mathbb{I}$	$r \in \mathbb{R}$
sen A = $\sqrt{55}/8 \doteq 0.9270$	⌊_____⌋	⌊_____⌋	⌊_____⌋
cos A = $3/8 = 0.3750$	⌊_____⌋	⌊_____⌋	⌊_____⌋
tan A = $\sqrt{55}/3 \doteq 2.4721$	⌊_____⌋	⌊_____⌋	⌊_____⌋
cot A = $3\sqrt{55}/55 \doteq 0.4045$	⌊_____⌋	⌊_____⌋	⌊_____⌋
sec A = $8/3 = 2.6666\ldots$	⌊_____⌋	⌊_____⌋	⌊_____⌋
cosec A = $\frac{8\sqrt{55}}{55} \doteq 1.0787$	⌊_____⌋	⌊_____⌋	⌊_____⌋

$r \in \mathbb{Q}$	$r \in \mathbb{I}$	$r \in \mathbb{R}$
⌊_____⌋	⌊✓⌋	⌊✓⌋
⌊✓⌋	⌊_____⌋	⌊✓⌋
⌊_____⌋	⌊✓⌋	⌊✓⌋
⌊_____⌋	⌊✓⌋	⌊✓⌋
⌊✓⌋	⌊_____⌋	⌊✓⌋
⌊_____⌋	⌊✓⌋	⌊✓⌋

119

Podemos afirmar intuitivamente que:

Todas las razones trigonométricas son números [ ]

Algunas razones trigonométricas son números [ ]

Algunas razones trigonométricas son números [ ]

reales

racionales

irracionales

120

A partir del conocimiento de que:

$$\sec A = 3$$

se requiere determinar las razones trigonométricas faltantes del ángulo A.

121

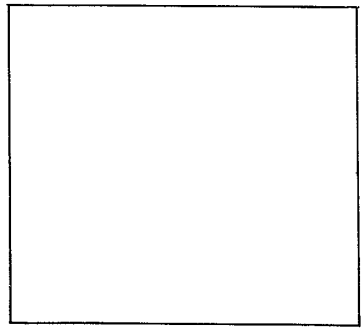
$$\sec A = 3$$

La razón expresada en forma de fracción común irreducible es [ ]

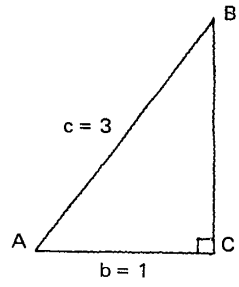
$\frac{3}{1}$

122

1. Triángulo rectángulo de referencia:



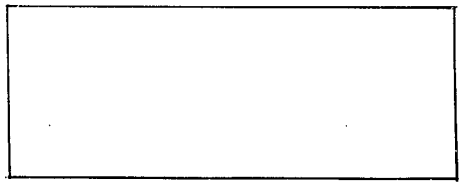
Por ejemplo:



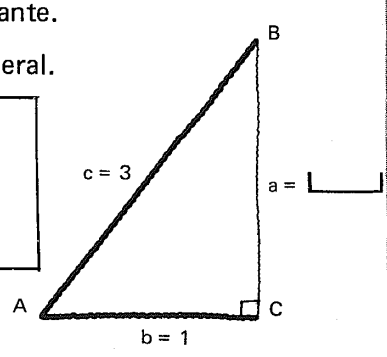
123

2. Cálculo del valor del lado faltante.

a = ⌊ ⌋ expresión general.



a ≐ ⌊ ⌋ unidades de longitud.



- $\sqrt{c^2 - b^2}$
- $\sqrt{3^2 - 1^2}$

  $\sqrt{9 - 1}$

  $\sqrt{8}$

- 2.8284

124

3. Anotación de las razones trigonométricas faltantes.

sen A = ⌊ ⌋

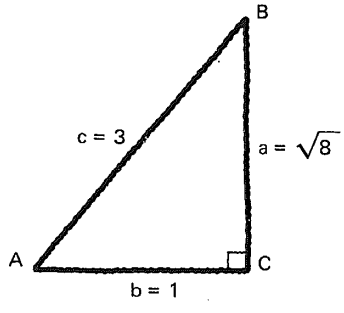
cos A = ⌊ ⌋

tan A = ⌊ ⌋

cot A = ⌊ ⌋

sec A = 3

cosec A = ⌊ ⌋



- $\frac{\sqrt{8}}{3}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{\sqrt{8}}{1} = \sqrt{8}$
- $\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8}$
- $\frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3\sqrt{8}}{8}$

125

Escribir en forma de fracción decimal, con 4 cifras decimales, las siguientes razones trigonométricas, y comprobar los resultados a partir de la reciprocidad de seno y cosecante, etc.

$\text{sen } A = \frac{\sqrt{8}}{3} \doteq \square$ 0.9428

$\cos A = \frac{1}{3} \doteq \square$ 0.3333

$\tan A = \sqrt{8} \doteq \square$ 2.8284

$\cot A = \frac{\sqrt{8}}{8} \doteq \square$ 0.3536

$\sec A = 3 = \square$ 3.0000

$\text{cosec } A = \frac{3\sqrt{8}}{8} \doteq \square$ 1.0607

126

Sabemos que:

$\text{cosec } \alpha \doteq 1.1180 \qquad [\text{cosec } \alpha \notin \mathbb{Q}]$

y requerimos las razones faltantes del ángulo α.

127

$\text{cosec } \alpha \doteq 1.1180 \qquad [\text{cosec } \alpha \notin \mathbb{Q}]$

Podemos expresar **1.1180**

en la forma $\frac{\mathbf{1.1180}}{\mathbf{1}}$

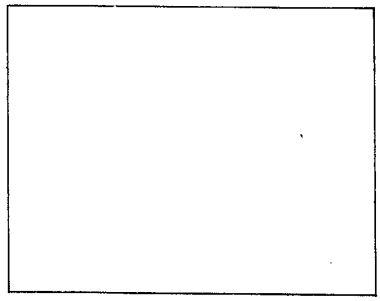
aunque no sea esta última la expresión de una fracción común

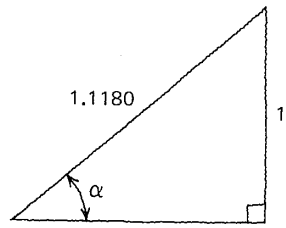
$\left[\frac{a}{b} \wedge a, b \in \mathbb{Z}\right]$

128

1. Triángulo rectángulo de referencia:

para $\operatorname{cosec} \alpha \doteq \frac{1.1180}{1}$

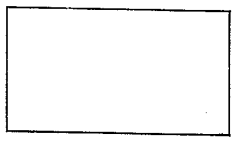


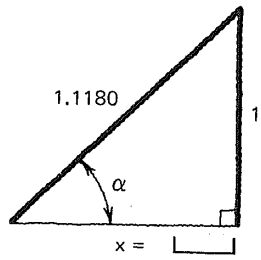


129

2. Cálculo de la medida del lado faltante.

$x \doteq$ ⌊_____⌋





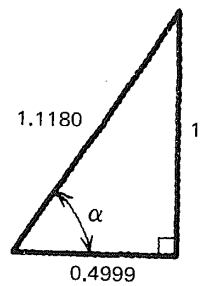
$x \doteq$ ⌊_____⌋ unidades de longitud.

- $\sqrt{1.1180^2 - 1^2}$
- $\sqrt{1.2499 - 1}$
- $\sqrt{0.2499}$
- 0.4999
-

130

3. Anotación de las razones trigonométricas faltantes, en forma de fracción decimal, con 4 cifras decimales:

sen $\alpha \doteq$ ⌊____⌋
cos $\alpha \doteq$ ⌊____⌋
tan $\alpha \doteq$ ⌊____⌋
cot $\alpha \doteq$ ⌊____⌋
sec $\alpha \doteq$ ⌊____⌋
cosec $\alpha \doteq 1.1180$



0.8945
0.4471
2.0004
0.4999
2.2364

131

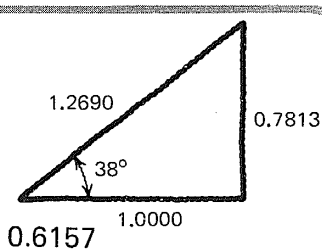
Comprobar los resultados, a partir de la reciprocidad de las razones trigonométricas, si se considera necesario.

sen $\alpha \doteq 0.8945$
cos $\alpha \doteq 0.4471$
tan $\alpha \doteq 2.0004$
cot $\alpha \doteq 0.4999$
sec $\alpha \doteq 2.2364$
cosec $\alpha \doteq 1.1180$

132

tan $38° \doteq 0.7813$

sen $38° \doteq$ ____
cos $38° \doteq$ ____
cot $38° \doteq$ ____
sec $38° \doteq$ ____
cosec $38° \doteq$ ____

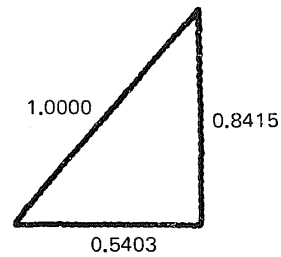


0.6157
0.7880
1.2799
1.2690
1.6242

133

sen 1 radián $\doteq 0.8415$

cos $1 \doteq$ ____
tan $1 \doteq$ ____
cot $1 \doteq$ ____
sec $1 \doteq$ ____
cosec $1 \doteq$ ____



0.5403
1.5575
0.6421
1.8508
1.1884

5.1.4.2

Práctica adicional,
si se considera necesario.

134

$\text{sen } 15^\circ \doteq 0.2588$

$\text{cosec } 15^\circ = \square$

$$\frac{1}{\text{sen } 15^\circ} \doteq \frac{1}{0.2588} \doteq 3.8640$$

135

$\cos 48^\circ 27' = \cos 48.45^\circ \doteq 0.6633$

$\sec 48^\circ 27' = \sec 48.45^\circ \doteq \square$

1.5077

136

tan 0.75 radianes ≐ 0.9316

cot 0.75 radianes ≐ [_____]

1.0734

5.1.4.3

Práctica adicional,
si se considera necesario.

5.1.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar*, a partir de una razón trigonométrica dada, las cinco razones trigonométricas faltantes del mismo ángulo.

1.5

Razones trigonométricas de ángulos de 45°, 30° y 60°.

137

Las razones trigonométricas de un ángulo dado, pueden encontrarse en tablas, o pueden ser determinadas por medio de una calculadora adecuada.

5.1.5.1

Práctica adicional de determinaciones de las razones trigonométricas de un ángulo dado, por medio de una tabla o calculadora, si se considera necesario.

5.1.5.2

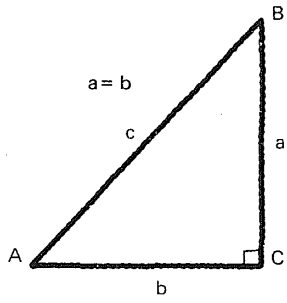
Práctica adicional de determinación del ángulo correspondiente a una cierta razón trigonométrica dada (es decir, el arcoseno, arcocoseno, arcotangente, etc.), por medio de una tabla o calculadora, si se considera necesario.

138

Las razones trigonométricas de algunos ángulos agudos pueden ser determinadas fácilmente sin emplear tablas o calculadoras.
Son de uso frecuente las razones trigonométricas de ángulos de 30°, 45° y 60°

139

Consideremos un triángulo rectángulo tal que sus catetos sean congruentes.
Por tener dos lados congruentes, se trata de un triángulo. [ ]

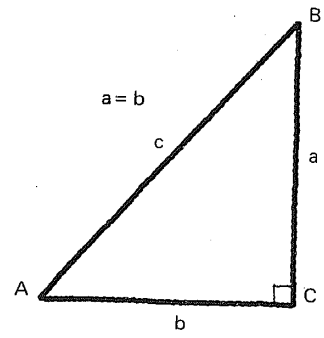


isósceles

140

Sabemos que en todo triángulo isósceles, los ángulos interiores opuestos a los lados congruentes

son [ ]



Por lo tanto, podemos escribir en relación con la figura:

[ ]

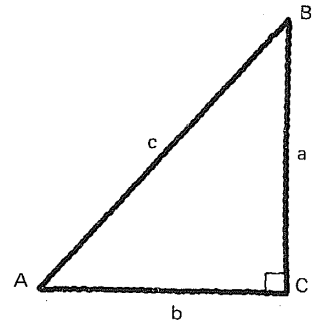
congruentes

$\measuredangle A = \measuredangle B$ (ó $< A \cong < B$)

141

Entonces,

$\measuredangle A = \measuredangle B =$ [ ]



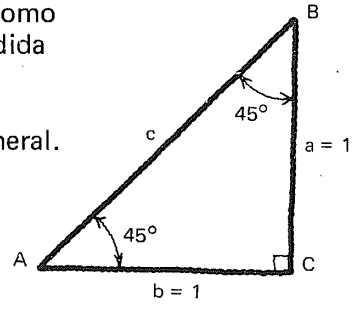
Dar la medida en grados.

45°

142

Asignemos arbitrariamente a los catetos congruentes la unidad como medida, y determinemos la medida de la hipotenusa:

c = [ ] expresión general.



c = [ ]

- $\sqrt{a^2 + b^2}$
- $\sqrt{1^2 + 1^2}$

  $\sqrt{1 + 1}$
- $\sqrt{2}$

143

Podemos escribir:

sen 45° = $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$

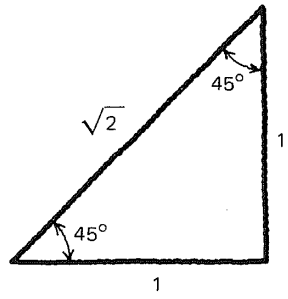
cos 45° = ⌊_____⌋

tan 45° = ⌊_____⌋

cot 45° = ⌊_____⌋

sec 45° = ⌊_____⌋

cosec 45° = ⌊_____⌋



- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{1}{1} = 1$
- $\frac{1}{1} = 1$
- $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$
- $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

144

Escribir en forma de fracción decimal (con 4 cifras decimales):

sen 45° = $\sqrt{2}/2 \doteq$ ⌊_____⌋

cos 45° = $\sqrt{2}/2 \doteq$ ⌊_____⌋

tan 45° = 1 = ⌊_____⌋

cot 45° = 1 = ⌊_____⌋

sec 45° = $\sqrt{2} \doteq$ ⌊_____⌋

cosec 45° = $\sqrt{2} \doteq$ ⌊_____⌋

0.7071

0.7071

1.0000

1.0000

1.4142

1.4142

145

45° = ⌊_____⌋ radianes.

$\frac{\pi}{4}$

146

Las razones trigonométricas de un ángulo de 45° (ó $\pi/4$ radianes)

$$\text{sen } 45° = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}/2 \doteq 0.7071$$

$$\cos 45° = \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}/2 \doteq 0.7071$$

$$\tan 45° = \tan \frac{\pi}{4} = 1 = 1.0000$$

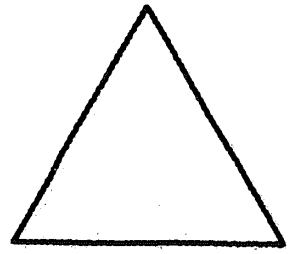
$$\cot 45° = \cot \frac{\pi}{4} = 1 = 1.0000$$

$$\sec 45° = \sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \doteq 1.4142$$

$$\text{cosec } 45° = \text{cosec } \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \doteq 1.4142$$

147

Ahora, consideremos un triángulo equilátero.
Sabemos que sus tres ángulos interiores son congruentes, y su medida es igual a [_____]°.



60

148

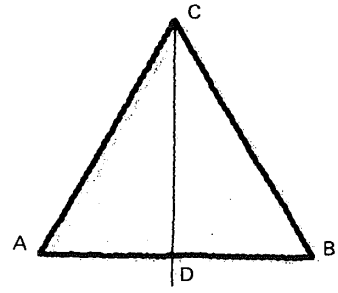
Recordemos que si $\overrightarrow{CD}$ es la bisectriz del $< C$

$\measuredangle ADC =$ [_____]°

$\measuredangle BDC =$ [_____]°

$|\overrightarrow{AD}|$ [_____] $|\overrightarrow{DB}|$

indicar el signo que corresponda en la última expresión.



90

90

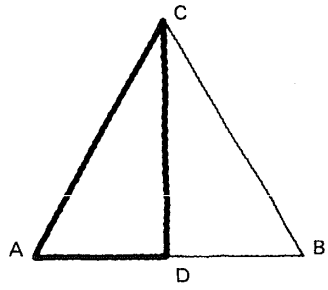
=

149

En el △ ACD:

$\measuredangle A =$ ⌊_____⌋

$\measuredangle ACD =$ ⌊_____⌋



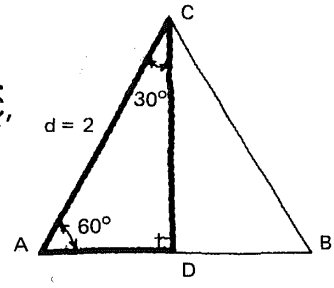
60°

30°

150

Si asignamos arbitrariamente 2 unidades a la medida del lado $\overline{AC}$, entonces,

$|\overrightarrow{AD}| =$ ⌊_____⌋



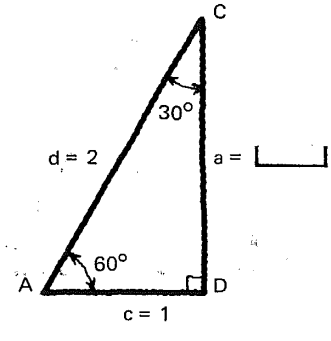
1

151

$|\overrightarrow{CD}| = a =$ ⌊___⌋

porque

⌊_____⌋



$\sqrt{3}$

- $a = \sqrt{d^2 - c^2}$

  $a = \sqrt{2^2 - 1^2}$

  $a = \sqrt{4 - 1}$

  $a = \sqrt{3}$

152

Podemos escribir:

sen 60° = $\sqrt{3}/2$

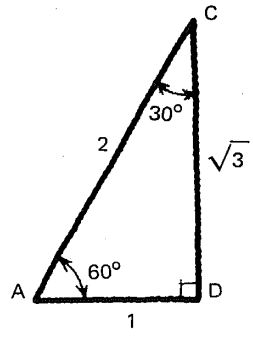
cos 60° = ____

tan 60° = ____

cot 60° = ____

sec 60° = ____

cosec 60° = ____



- $\frac{1}{2}$
- $\sqrt{3}$
- $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- 2
- $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

153

Con 4 cifras decimales

sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2} \doteq$ ____

cos 60° = $\frac{1}{2}$ = ____

tan 60° = $\sqrt{3} \doteq$ ____

cot 60° = $\frac{\sqrt{3}}{3} \doteq$ ____

sec 60° = 2 = ____

cosec 60° = $\frac{2\sqrt{3}}{3} \doteq$ ____

0.8660

0.5000

1.7320

0.5773

2.0000

1.1547

154

También:

sen 30° = ____

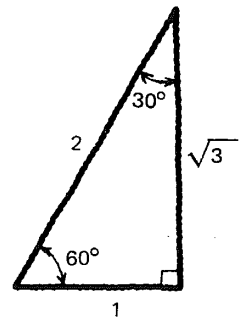
cos 30° = ____

tan 30° = ____

cot 30° = ____

sec 30° = ____

cosec 30° = ____



- $\frac{1}{2}$
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sqrt{3}$
- $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
- 2

155

Con 4 cifras decimales

$\text{sen } 30° = \frac{1}{2} = \square$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq \square$

$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq \square$

$\text{cot } 30° = \sqrt{3} \doteq \square$

$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \square$

$\text{cosec } 30° = 2 \doteq \square$

0.5000

0.8660

0.5773

1.7320

1.1547

2.0000

156

$60° = \square$ radianes.

$30° = \square$ radianes.

$\pi/3$

$\pi/6$

157

Razones trigonométricas de un ángulo de 30° ($\pi/6$ radianes), **y de 60°** ($\pi/3$ radianes).

$\pi/6$ radianes		**$\pi/3$ radianes**
$\text{sen } 30°$	$\frac{1}{2} = 0.5000 =$	$\cos 60°$
$\cos 30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0.8660 \doteq$	$\text{sen } 60°$
$\tan 30°$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0.5773 \doteq$	$\text{cot } 60°$
$\text{cot } 30°$	$\sqrt{3} = 1.7320 =$	$\tan 60°$
$\sec 30°$	$\frac{2\sqrt{3}}{3} \doteq 1.1547 \doteq$	$\text{cosec } 60°$
$\text{cosec } 30°$	$2 \doteq 2.0000 \doteq$	$\sec 60°$

5.1.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* las razones trigonométricas para ángulos de 30°, 45° y 60°.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de febrero de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100